

○○위키가 알려주지 않는 수학 이야기

小栗戸栗 (Ogri Togri)

팬티를 입는 방법은 몇 가지나 될까? 디즈니의 애니메이션 <빅 히어로>의 프레드 Fred는 다음과 같이 설명한다.

“ I wear them front, I wear them back,
I go inside out, then I go front and
back!

앞으로 입고, 돌려 입고, 뒤집어서 앞으로
입고, 뒤집어서 돌려 입고!

”

이를 수학으로 표현해보자.

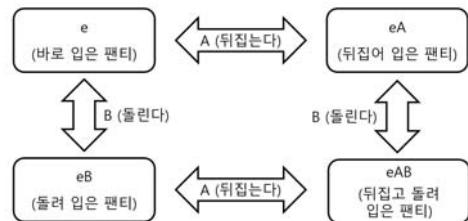
팬티를 바로 입은 상태를 **e**라고 하고, 팬티를 뒤집어 입는 것을 **A**, 돌려 입는 것을 **B**로 표기하자. 예를 들어, 팬티를 뒤집어 입었으면 **eA**, 뒤집은 다음 돌려 입었으면 **eAB** 식으로 표기하는 것이다. 여기서 다음과 같은 사실을 관찰할 수 있다.

eAA = e 두 번 뒤집으면 똑같아진다

eBB = e 두 번 돌리면 똑같아진다

eAB = eBA 뒤집어서 돌리나
돌려서 뒤집으나 똑같다

여기에 약간의 추론을 더하면 팬티를 입을 수 있는 가능성은 **{e, eA, eB, eAB}** 네 가지밖에 없다는 결론이 나온다. 다시 말해 아무리 **e, A, B**를 가지고 표기를 복잡하게 하더라도 결국 저 네 가지 중 하나랑 동일하다는 것이다. 이들의 관계를 그림으로 표현하면 다음 그림과 같다.



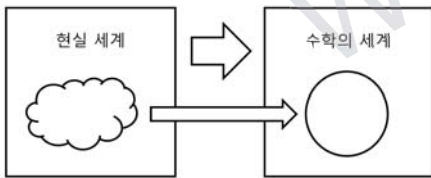
사실 우리는 수학자가 아니더라도, 그리고 프레드처럼 몸소 실천하는 사람이 아니더라도 팬티를 입는 방법이 4가지뿐이라는 것을 생각해낼 수 있다.

그렇다면 수학자들은 왜 이러는 것일까?

I. 수학자들은 왜 이러는 걸까

현실 세계를 설명하는 방법은 여러 가지가 있지만, 시대에 따라 사람들이 인정해주는 주류 해석이라는 것이 하나씩 있었다. 고대 사람들은 여러 명의 신들이 태양과 행성을 움직인다고 믿었고, 그 당시에는 아직 팬티도 발명되지 않았다. 수천 년이 지난 지금 사람들은 행성이 움직이는 물리법칙을 알고 있고, 그 위치도 거의 정확하게 예측할 수 있다. 현실 세계를 설명하기 위한 방법 가운데 오늘날 사람들이 인정해주는 가장 좋은 방법은 바로 과학인 것이다.

그런 과학에서는 현실을 분석하기 위해 구체적으로 어떤 방법을 사용할까? 과학자들은 행성의 움직임을 수식과 방정식과 그래프로 표현하고, 팬티를 **eAB**로 표현한다. 이 두 가지에는 공통점이 있다. 바로 현실 세계를 수학의 세계로 옮겨놓고 분석한다는 것이다.



모두 알고 있듯이 현실 세계는 수학의 세계와 많이 다르다. 행성의 궤도는 우리가 몰랐던 소행성 때문에 미세하게나마 틀어질 수도 있고, 팬티 중에서도 구조적으로 뒤집을 수 없는 팬티도 있을 것이다. 하지만 우리는 우리가 알고 싶은 몇 가지 현상을 연구하기 위해 일부러 현실 속의 나머지 성질을 무시하고 수학의 세계로 끌어들이는 것이다. 팬티를 생각해 보자. 우리는 앞서 팬티에 대해 우리도 모르게 몇 가지 가

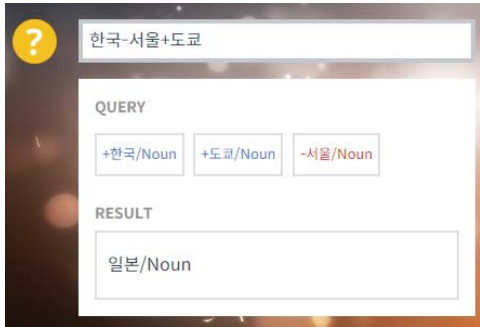
정을 해버렸다.

- 팬티는 구멍이 2개인 곡면이다.
- 팬티의 재질은 부드러워서 쉽게 뒤집을 수 있다.
- 팬티를 뒤집는 과정에서 늘어날 수는 있어도 찢어지진 않는다.

어떤 사람은 심지어 팬티를 수학적으로 더 엄밀하게 정의했을 테지만, 여기서 그렇게까지 하고 싶지는 않다. 중요한 건 우리가 팬티의 세계를 수학의 세계로 옮기기 위해 여러 가지 세부사항을 희생시켰다는 점이다. 실제 팬티는 좀더 복잡하게 생겼지만 ‘입는 방법’만을 알기 위해 다른 부분을 생략한 것이다.

그렇게 해서 무엇을 얻었을까? 우리는 팬티를 돌리고 뒤집는 것을 위한 표기법과 연산을 만들었다. 그 덕분에 우리는 팬티를 구체적으로 묘사하지 않고 **eAB**라고만 써놔도 어떤 상태인지 알 수 있게 되었다. 또한 우리는 이 연산의 성질을 밝혀냈기 때문에, **eAABBAABBBA**라고 쓰여 있어도 그것이 **eAB**랑 똑같다는 사실을 (시간은 걸리겠지만) 기계적으로 추론해낼 수 있다.

이처럼 팬티의 세계를 수학의 세계로 옮겨놓으면 팬티하고는 전혀 관계없어 보이는 추상적인 연산의 세계가 되어 버린다. 그 결과 팬티를 직접 돌리고 뒤집어 보는 대신 간단한 연산으로 편하게 조작할 수 있게 되기도 했고, 팬티만 생각했을 때에는 알 수 없었던 새로운 사실을 알게 되기도 했다. 그 중에서는 거꾸로 팬티를 이해하는 데에 도움을 주는 것이 있을지도 모른다.



II. word2vec

위 그림은 <http://w.elnn.kr/> 의 화면을 캡처한 것이다. 혹시 위와 같은 웹사이트를 본 적이 있다면, word2vec을 알고 있는 것이다. 쉽게 말해서 word2vec은 단어를 더하고 빼 수 있는 도구다. 이걸로 예를 들어 **서울 : 한국 = 도쿄 : ?** 같은 질문을 풀 수 있다. **한국 - 서울 + 도쿄 = 일본**, 그러므로 답은 **일본**이다.

팬티의 경우처럼 word2vec도 현실 세계를 수학의 세계로 옮겨놓은 결과다. 좀 더 자세히 말하면, 단어 하나하나를 ‘벡터’에 대응시켜서 단어 전체의 공간을 벡터 공간으로 옮겨놓은 것이다. 벡터가 정확히 무엇인지는 여기서 다루지 않겠지만, 두 가지 장점이 있다는 건 말할 필요가 있다. 벡터끼리는 덧셈 · 뺄셈을 쉽게 할 수 있고, 벡터끼리는 거리를 잴 수 있어서 어떤 게 가깝고 어떤 게 멀리 있는지를 알 수 있다.

생각해 보면 단어들끼리에도 멀고 가까운 거리가 있을 것 같다. ‘사과’는 ‘복숭아’에 가까이 있지만 ‘오징어’하고는 멀리 떨어져 있을 것이다. 하지만 얼마나 멀리 떨어져 있을까? 구체적인 거리를 예측해보기 위해 word2vec을 이용할 수 있을 것이다. 하지만 덧셈과 뺄셈에는 어떤 의미가 있을

까? ‘인간’에 ‘오징어’를 더하면 어떤 결과가 나올까? 혹시 원빈이 등장하기 전에는 그게 다른 결과가 나왔을까? 쉽지는 않은 문제다.

단어 하나하나를 추상적인 개념에 해당하기 때문에 직접적으로 덧셈 뺄셈을 정의할 수 없는 것들이 훨씬 많을 것이다. 만약 단어 공간이라는 것이 존재한다면, 연관된 단어끼리 서로 얽히고 설킨 아주 정교한 구조를 가질 것이다. 반면 벡터 공간은 수학의 세계 속에서도 아주 단순하고 다루기 쉬운 구조에 속한다. ‘오징어’는 심해생물을 뜻할 수도 있지만 어떤 특징을 가진 사람에 대한 비유가 될 수도 있다. 하지만 이 단어를 벡터 공간으로 옮겨버리면 이런 정보는 사라져버릴 가능성이 크다.

수학의 세계로 옮겨놓으면 무언가를 희생해야 한다는 말을 위에서 했는데, 여기서도 복잡한 단어 공간을 단순하게 만들면서 여러 가지가 희생되었다. 대신 무엇을 얻었을까? 왜 이런 작업을 하는 걸까? 바로 컴퓨터를 위해서다. 컴퓨터가 인간의 언어를 더 이해할 수 있도록 word2vec을 만든 것이다.

III. 수학의 세계와 컴퓨터의 세계

요즘 컴퓨터는 바둑으로 사람을 이길 수 있다. 하지만 원래 컴퓨터는 구조상 ‘덧셈과 곱셈’ 정도밖에 못한다. 컴퓨터가 덧셈과 곱셈밖에 못한다니, 그럴 리가 없다고? 만약 의심이 된다면 주변의 전문가한테 물어보라. 아니면 트위터에 시비를 거는 방법도 있다. 맞춤법을 한두 군데 틀려주는 것이 좀더 효과적이다.

컴공과한테 들었는데 게임엔진 만들필요
없다며? 원래 cpu에 그런 기능 다있었던
데 왜만듬ㅋㅋㅋㅋ

운이 좋다면 전공생들이 동시다발적으로
나타나서 전자회로의 구조부터 친절하게
차근차근 설명해줄 것이다. 트위터는 좋은
곳이다.

CPU에 모든 기능이 다 들어 있다면 프로
그래머가 필요하지도 않을 것이다. ‘덧셈과
곱셈’을 어떻게 효율적으로 활용하여 현실
의 문제를 풀도록 컴퓨터에게 시킬 것인가,
이것이 프로그래머들의 고민이다. 프로그
래머는 어떻게 그 고민을 해결할까? 일단
현실 속 문제를 계산 가능한 수학의 문제로
바꾼 다음, 이걸 다시 단순한 컴퓨터가 풀
수 있는 ‘덧셈과 곱셈’의 문제로 바꾼다.



예를 들어보자. 포토샵의 블러blur는 이
미지를 흐리게 만드는 효과를 준다. 구글에
‘포토샵 블러’라고 검색해보면 쉽게 알 것
이다. 컴퓨터는 이걸 어떻게 하고 있는 것
일까? 각 픽셀의 색깔 값이랑 적당히 근처
에 있는 픽셀의 색깔 값이랑 평균을 내면
된다. 붙어있는 픽셀끼리 색깔이 서로 상쇄
되기 때문에 이미지가 흐려지는 원리다. 평
균은 덧셈과 곱셈을 잘 조합해서 계산할 수
있으므로 컴퓨터가 할 수 있는 계산이다.
포토샵의 다른 여러 가지 기능도 전부 컴퓨
터가 할 수 있는 계산으로 구현된 것들이

다.

그렇다면 컴퓨터에게 인간의 언어를 이
해시키려면 어떻게 해야 할까? 우선 언어
의 공간을 컴퓨터가 계산을 할 수 있는 계
산 가능한 공간으로 옮기는 작업이 필요할
것이다. 다른 사람의 말을 이해하는 과정,
그 말을 듣고 적절한 대답을 만들어내는 과
정 등을 컴퓨터가 ‘계산’할 수 있도록 프로
그래머가 수학 공간으로 끌어와 줘야 한다.
그 시도 중 하나가 word2vec인 것이다. 벡
터 공간은 수학적으로 간단한 공간이므로
컴퓨터가 계산하기도 쉽고 프로그래머가
실수할 가능성도 적다. 단어를 이 벡터 공
간에 배치하면 각 단어의 의미가 무엇인지
를 (여러 가지가 생략되어 정확하지는 않
겠지만) 컴퓨터가 쉽게 판단할 수 있다는
것이다.

IV. 결론

지금까지 현실 세계를 수학의 세계로 옮
겨놓는 과정 몇 가지를 보았다. 수학의 세
계로 옮겨지면서 복잡한 개념이 몇 개의 기
호로만 표현되는 것도 보았고, 복잡한 개념
이 컴퓨터로 구현되는 것도 보았다. 하지만
우리가 수학을 이용하는 이유는 이것 말고
도 더 있다.

수학의 세계에서는 개념이 잘 정의되어
있고 가정만 충분히 주어져 있으면 무언가
를 증명할 수 있다. 그러므로 개념과 상황
이 똑같이 주어졌다면 항상 옳은 주장이 있
고 항상 틀린 주장이 있다는 것이다. 반면
현실 세계엔 ‘항상 옳은 주장’은 거의 존재
하지 않는다. 그러므로 우리는 어떤 주장을
하기 위해 현실을 수학의 세계로 끌어들이

는 것이다.

예를 들어, 사회과학의 많은 분야에서는 통계를 쓴다. 인간의 사회는 복잡하고 불확실하며 무엇보다도 실험실에 집어넣을 수가 없기 때문에 연구하기 힘들다. 반면 통계의 세계에선 확률과 확률 사이의 계산만큼은 확실하고 틀림이 없다. 다만 몇 가지 가정을 해줘야 할 뿐이다. 그렇기 때문에 사회학자들은 인간의 사회를 확률의 세계로 옮기는 과정에서 그 몇 가지 가정을 하게 된다. 그들의 연구를 검증하기 위해서는, 그들이 어떤 가정을 했고 어떤 세부사항이 누락되었는지, 데이터 수집을 제대로 했는지를 보면 된다. 가정이 제대로 되어 있다면 통계학과 수학 자체에서 오류가 나올 일은 별로 없을 것이기 때문이다.

장황하게 썼지만 마감이 다가오므로 결론을 내겠다. 많은 사람들이 수학을 어려워하지만, 실제로는 그 반대다. 현실 세계의 문제가 훨씬 더 어렵기 때문에 그것을 쉽게 풀어내려고 만든 도구가 바로 수학이다. 물론 수학자들은 그 수학 자체를 더 엄밀하고 더 정교하게 발전시키고 있지만, 많은 사람들에게 수학은 그냥 도구고, 도구여야 한다. 이 부족한 글로나마 수학을 두려워하는 사람이 조금이나마 줄어들었으면 좋겠다.

더 알고 싶은 이를 위해

위키를 통해 공부하는 것은 추천하지 않는다. ○○위키든 위키○○든 마찬가지다. 사전식으로 서술된 정보로 공부하는 데에는 한계가 있기 때문이다. 만약 위키를 통해 하나를 배웠다고 하더라도 그 다음에는 무엇을 공부해야 할지, 어느 방향으로 가야

할지 위키는 알려주지 못한다. 그리고 위키에 아예 틀린 정보가 있는 경우도 많다.

추천하고 싶은 좋은 책이 많지만, 영어 원서나 교과서는 언급하지 않겠다. 그런 책을 혼자서 공부할 수 있는 사람이라면 애초에 이 글에 의지할 필요도 없을 것이다.

이 글의 취지와 가장 가까운 책을 꼽으라면 수학자 김민형, 김태경의 <수학의 수학>(은행나무, 2016)일 것이다. 모든 것은 연산 가능하며 연산 가능한 구조를 탐구하는 것이 수학의 본질이라는 이야기를 주로 한다. 중간중간 수식은 나오지만 건너뛰더라도 대체적인 맥락은 파악할 수 있을 것이다.

유지니아 쉥의 <수학을 요리하다>(이화란 역, 처음북스, 2016)은 수학에서 추상화가 왜 중요한지를 요리 같은 생활에 근접한 비유를 들어서 설명한다. 문체가 어떤 이에겐 친절할 수도 어떤 이에겐 장황할 수도 있다.

이 글의 본문과는 직접적인 관련이 없지만, 유키 히로시의 <수학 걸>(김정환 역, 동아일보사, 2008)은 언급할 만 하다. 중고등학교 수학 범위 중 고난이도의 문제풀이를 라이트노벨 형식으로 소개한다. 다시 말해 여고생이 남고생에게 설명해준다는 방식이다.

이미 중고등학교 수학까지는 익숙한 사람이라면 티모시 가워스의 <아주 짧게 소개하는 수학>(박기현 역, 교우사, 2013)도 추천한다. 수학의 논증 과정이 어떠한지, 역사적으로 논리적 오류가 있었는지 등을 제목처럼 짧게 소개한다. 영어를 직역한 문체가 익숙하지 않다면 읽는 게 다소 느려질

수도 있다.

클리퍼드 픽오버의 <수학의 파노라마>(김지선 역, 사이언스북스, 2015)는 내용도 괜찮지만, 혹시 사놓고 읽지 않더라도 장식용으로 훌륭한 기능을 한다. 수학의 중요한 개념들을 소개하면서 알록달록한 사진을 실어서 마치 화보처럼 꾸며놓은 책이기 때문이다. SSCC 1st

SSCC 1st
Web ver.